Facharbeit
aus dem Fach
Mathematik

**Thema: Wahrscheinlichkeitsberechnung beim Schafkopf**

# Inhalt

## 1 Einführung in die Thematik

Das über vierhundert Jahre alte Spiel „Schafkopf“ ist eines der beliebtesten Kartenspiele in Bayern. Es wird vermutet, dass der Name vom Aufschreiben der Spiele kommt. Dabei wurden aus neun Strichen schafkopfähnliche Zeichnungen gemalt. Das Spiel an sich erfordert ein hohes Maß an Konzentration, ein gutes Gedächtnis und vor allem Spieltaktik.
Doch auch der beste Schafkopf-Spieler kann nicht mit jedem Blatt gewinnen, es gehört auch Glück für ein „gutes Blatt“ dazu.

Die erfahrenen Schafkopf-Spieler wissen ziemlich genau, mit welchen Karten sie welches Spiel gewinnen können, wobei sie sich auf ihr gutes Gefühl oder auf ihre Erfahrung verlassen können. Kaum ein Spieler kennt sich aber mit Berechnungen beim Schafkopf aus, denn dieses Gefühl eines erfahrenen Spielers lässt sich auch mathematisch durch kombinatorische Wahrscheinlichkeitsberechnung ausdrücken. Im Folgenden wird auf die Wahrscheinlichkeitsberechnung beim Schafkopf eingegangen, damit auch unerfahrene Spieler leichter Spielsituationen richtig einschätzen können und somit ihre Voraussetzungen verbessern, ein erfolgreicher Schafkopf-Spieler zu werden.

Die Kenntnis der Schafkopf-Regeln wird im Folgenden vorausgesetzt.

## 2 Berechnungen zum Kartenausteilen

Das Kartenausteilen beim Schafkopf kann als Laplace-Experiment verstanden werden, da nach sehr gutem Mischen der Karten jedes Blatt gleich wahrscheinlich ist. Hierbei ist es für die Wahrscheinlichkeitsberechnung völlig belanglos, ob die Karten einzeln, alle auf einmal oder zweimal je 4 Karten ausgeteilt werden.

Die Wahrscheinlichkeit für ein jeweils bestimmtes Blatt kann mit der Formel

$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der mögl. gleichwahrscheinlichen Ergebnisse}}$ berechnet werden.

(Barth / Mühlbauer / Nikol / Wörle,
Mathematische Formeln und Definitionen S.107)

Insgesamt gibt es $\Omega = \binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8} = 99.561.092.450.391.000$ Möglichkeiten die

Karten auszuteilen (ca. 99,6 Billiarden). Es werden 4 mal 8 Karten verteilt.

Für das eigene Blatt gibt es noch $\binom{32}{8} = 10.518.300$ Möglichkeiten (ca. 10,5 Millionen).

Die Wahrscheinlichkeit für ein ganz bestimmtes Blatt errechnet sich nach der oben genannten Formel: $\frac{1}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{10.518.300} \approx 0{,}000009507\%$

(1 günstiges Ereignis dividiert durch die Gesamtanzahl an Möglichkeiten)

# 3 Berechnungen zu den unterschiedlichen Soli

## 3.1 Solo Sie

### 3.1.1 Wahrscheinlichkeit für ein Solo Sie

Wegen der Formel „günstige durch mögliche Ereignisse“ ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeit:

P(„Ein bestimmter Spieler hat ein Solo Sie“) $= \frac{1}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{10.518.300} \approx 0{,}000009507\%$

### 3.1.2 Wahrscheinlichkeit für Solo Sie nach den ersten vier Karten

**Ausgangsposition:**
Es werden korrekterweise jedem Spieler zwei mal vier Karten ausgeteilt.

Ein Spieler besitzt nach der Hälfte der ausgegeben Karten nur Ober und Unter.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann er mit den restlichen Obern und Untern rechnen?

Hier muss unterschieden werden, an welcher Stelle sich der Spieler befindet.

Der **Spieler an Position 1** hat nur Unter und Ober erhalten. Die nächsten 12 Karten werden an die anderen Spieler verteilt. Keine dieser 12 Karten darf ein Ober oder Unter sein.

P(„Kein Ober und Unter geht an Spieler 2, 3 oder 4“) = $\dfrac{\binom{4}{0}\binom{24}{12}}{\binom{28}{12}}$

Jetzt bekommt Spieler 1 seine restlichen 4 Karten. Dies müssen alles Ober und Unter sein.

P(„Restliche Ober und Unter“) = $\dfrac{\binom{4}{4}\binom{12}{0}}{\binom{16}{4}}$

P(„Der Spieler bekommt das Solo Sie“) $= \dfrac{\binom{4}{0}\binom{24}{12}}{\binom{28}{12}} \cdot \dfrac{\binom{4}{4}\binom{12}{0}}{\binom{16}{4}} = \dfrac{1}{20475} \approx$ 0,004884%

Hat also der Spieler an Position 1 nach den ersten vier ausgeteilten Karten nur Ober und Unter erhalten, so bekommt er mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 0,004884% die restlichen Laufenden.

**Der Spieler an Position 2 hat nur Ober und Unter erhalten:**

P(„Der Spieler bekommt das Solo Sie“) =

$$= \frac{\binom{8}{0}\binom{24}{4}}{\binom{32}{4}} \cdot 1 \cdot \frac{\binom{4}{0}\binom{20}{12}}{\binom{24}{12}} \cdot \frac{\binom{4}{4}\binom{8}{0}}{\binom{12}{4}} = \frac{1}{35960} \approx 0{,}002781\%$$

Spieler 1 darf zuvor keinen Ober oder Unter bekommen $\dfrac{\binom{8}{0}\binom{24}{4}}{\binom{32}{4}}$, dann erhält Spieler 2

mit der Wahrscheinlichkeit 1 (durch die Ausgangsposition vorgegeben) nur Ober und Unter. Die nächsten

12 Karten werden wiederum an Spieler 3, 4 und 1 ausgeteilt $\dfrac{\binom{4}{0}\binom{20}{12}}{\binom{24}{12}}$ ( kein Ober und

kein Unter).

Nun bekommt Spieler 2 die restlichen Ober und Unter $\frac{\binom{4}{4}\binom{8}{0}}{\binom{12}{4}}$.

**Spieler an Position 3:**

Die Berechnung verläuft nach dem gleichen Muster wie oben:

P(„Der Spieler bekommt das Solo Sie“) =

$$= \frac{\binom{8}{0}\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}} \cdot 1 \cdot \frac{\binom{4}{0}\binom{16}{12}}{\binom{20}{12}} \cdot \frac{\binom{4}{4}\binom{4}{0}}{\binom{8}{4}} \approx \frac{1}{69.291} \approx 0{,}001443\%$$

**Spieler an Position 4:**

P(„Der Spieler bekommt das Solo Sie“) =

$$= \frac{\binom{8}{0}\binom{24}{12}}{\binom{32}{12}} \cdot 1 \cdot \frac{\binom{4}{0}\binom{12}{12}}{\binom{16}{12}} \cdot 1 \approx \frac{1}{151.967} \approx 0{,}0006580\%$$

Warum sind diese Wahrscheinlichkeiten unterschiedlich? Die Position des Spielers sollte doch eigentlich unwichtig sein?

Grund:
Es war zuvor unterschiedlich wahrscheinlich, nach den ersten 4 Karten nur Ober und Unter zu bekommen. Beispielsweise für Spieler 4 ist das viel wahrscheinlicher als für Spieler 1.
Multipliziert man die errechneten Wahrscheinlichkeiten jeweils mit der Wahrscheinlichkeit
P(„nur Ober und Unter nach den ersten 4 Karten“), so ergibt sich bei allen Spielern die Gesamtwahrscheinlichkeit für das Solo Sie $\frac{1}{\binom{32}{8}}$. Die Position des Spielers ist also erst nach dem Austeilen aller 32 Karten belanglos.

## 3.2 Solo Tout

### 3.2.1 Sieben Laufende und ein Trumpf in beliebiger Farbe

Die Wahrscheinlichkeit, 7 Laufende (alle Ober und Unter bis auf den Schell-Unter) und einen weiteren Trumpf (eine Karte aus den 24 restlichen) zu erhalten, beträgt:

$$P(\text{„7 Laufende + Trumpf“}) = \frac{\binom{7}{7}\binom{1}{0}\binom{24}{1}}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{438.262,5} \approx 0{,}0002282\%$$

Egal an welcher Stelle der Spieler ist, er gewinnt dieses Tout-Spiel. Er besitzt 8 Trümpfe aus den 14 vorhandenen Trümpfen.

### 3.2.2 Sechs Laufende und zwei kleine Trümpfe

Die Wahrscheinlichkeit für den Erhalt wird folgendermaßen berechnet:
Der Spieler bekommt 6 Laufende, nicht aber die Unter in Schell und Herz.
Des weiteren wird eine aus den restlichen 24 Karten gezogen, die den 1. Trumpf darstellt.
Die letzte gezogene Karte muss die gleiche Farbe haben, wie der 1. Trumpf (1 aus 5)!

$$P(\text{„6 Laufende + 2 Trumpf“}) = \frac{\binom{6}{6}\binom{2}{0}\binom{24}{1}\binom{5}{1}}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{87.652,5} \approx 0{,}001141\%$$

Hier gewinnt der Spieler aber nur noch an Position 1 zu 100%.
An anderer Position ist es schon möglich, dass er sein Tout-Spiel verliert. Dies wird an einem Beispiel gezeigt:
Gegenspieler 1 spielt eine Farbe aus. Der Tout-Spieler an Position 2 weiß nicht, ob ein nachfolgender Gegenspieler in dieser Farbe frei ist und einen Trumpf besitzt und müsste einen seiner Laufenden spielen, um sicher zu stechen. Er hat jetzt aber nur noch 5 Laufende und ein Gegenspieler kann alle restlichen 6 Trümpfe besitzen. Spielt der Tout-Spieler nun seine 5 Laufenden aus, behält der Gegenspieler einen Unter und sticht den letzten Stich.
Derartig komplizierte Beispiele können leider wegen der unterschiedlichen Ausspielmöglichkeiten von Gegenspieler 1 nicht berechnet werden.

Deshalb wird bei den folgenden Fallbeispielen davon ausgegangen, dass der Tout-Spieler an Position 1 sitzt und zuerst seine Laufenden ausspielt.

## 3.2.3 Sechs Laufende, ein kleiner Trumpf und eine As in anderer Farbe

Für die Berechnung werden zunächst die sechs Laufenden gezogen, dann eine von vier Assen. Der Trumpf muss eine andere Farbe als die As besitzen, es bleiben also noch $6 \cdot 3 = 18$ Möglichkeiten.

$$\Rightarrow \text{ P(„6 Laufende + Trumpf + As“)} = \frac{\binom{6}{6}\binom{2}{0}\binom{4}{1}\binom{18}{1}}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{146.087,5} \approx 0,0006845\%$$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist jetzt auch bei Spieler 1 nicht mehr 100%.
Kein Gegenspieler darf alle 7 Trümpfe besitzen. Ansonsten behält er wieder einen Unter und macht den letzten Stich.

P(„Gewinn“) = 1 – P(„ein Gegenspieler hat 7 Trümpfe“)

$$\text{P(„ein bestimmter Gegenspieler hat 7 Trümpfe“)} = \frac{\binom{7}{7}\binom{17}{1}}{\binom{24}{8}}$$

$$\text{P(„Gewinn“)} = 1 - 3 \cdot \frac{\binom{7}{7}\binom{17}{1}}{\binom{24}{8}} \approx 99{,}99\%$$

Jeder der 3 Gegenspieler kann die 7 Trümpfe besitzen. Da nicht mehrere Spieler gleichzeitig 7 Trümpfe besitzen können (paarweise unvereinbar), kann die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Spieler die Trümpfe bekommt, einfach mit 3 multipliziert werden. Es werden die 7 Trümpfe und eine Karte aus den übrigen 17 Karten gezogen. Aus 24 Karten wird deshalb gezogen, weil schon 8 Karten an den Tout-Spieler ausgeteilt wurden.

## 3.2.4 Fünf Laufende und drei kleine Trümpfe

Die Berechnung verläuft nach dem Muster von Punkt 3.2.2 („6 Laufende und 2 kleine Trümpfe“), nur dass hier 2 Karten aus der Farbe des 1. Trumpfes gezogen werden anstatt einer.

P(„5 Laufende + 3 Trümpfe“) $= \dfrac{\binom{5}{5}\binom{3}{0}\binom{24}{1}\binom{5}{2}}{\binom{32}{8}} = \dfrac{1}{43826,25} \approx 0,002282\%$

Für den Gewinn darf keiner der Gegenspieler 6 Trümpfe besitzen.

P(„Gewinn“) = P(„keiner hat alle 6 Trümpfe“) $= 1 - 3 \cdot \dfrac{\binom{6}{6}\binom{18}{2}}{\binom{24}{8}} \approx 99,94\%$

Mit 3 darf einfach multipliziert werden, da nicht mehrere Gegenspieler gleichzeitig 6 Trümpfe haben können.

## 3.3 Wenz Tout

Beim Wenz gibt es nicht wie beim Solo 14 Trümpfe, sondern nur die 4 Unter sind Trümpfe. Der Trivialfall, dass ein Spieler alle 4 Unter und alle 4 Assen hat, besitzt die gleiche Wahrscheinlichkeit wie das Solo Sie.

### 3.3.1 Vier Laufende und As, 10er, König und Ober in einer Farbe

Die 4 Unter müssen gezogen werden (4 aus 4). Jetzt wird eine aus 16 Karten gewählt (4 Asse, 4 x 10er, 4 Könige und 4 Ober), die restlichen 3 Karten müssen folgen (jeweils die gleiche Farbe wie die zuvor gezogene Karte).

P(„4 Laufende + As, 10 , K, O“) $= \dfrac{\binom{4}{4}\binom{16}{1}\binom{3}{3}}{\binom{32}{8}} = \dfrac{1}{657393,75} \approx 0,0001521\%$

Der Sieg ist dem Tout-Spieler sicher.

## 3.3.2 Vier Laufende, zwei Asse und die zwei zugehörigen 10er

Neben den 4 Untern wird eine beliebige As oder ein 10er gezogen (8 Möglichkeiten), danach eine As oder ein 10er einer anderen Farbe (6 Möglichkeiten) und die letzten beiden Karten müssen folgen.

$$P(\text{„4 Laufende + 2 As + 2 10er“}) = \frac{\binom{4}{4}\binom{8}{1}\binom{6}{1}\binom{2}{2}}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{219\,131,25} \approx 0,0004563\%$$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 1.

## 3.3.3 Eichel-Unter (EU), Herz- oder Schell-Unter (HU oder SU), vier Asse und zwei 10er

### 3.3.3.1 Wahrscheinlichkeit für Erhalt und Gewinn

Der Spieler bekommt den Eichel-Unter (1 aus 1), den Herz- oder Schell-Unter (1 aus 2), alle Asse (4 aus 4) und zwei 10er (2 aus 4).

$$P(\text{„EU + HU oder SU + 4 Asse + 2 x 10er“}) = \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{4}\binom{4}{2}}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{876\,525} \approx 0,0001141\%$$

Soll der Spieler hier einen Wenz-Tout oder einen sicheren Wenz spielen, bei dem die Gegenspieler mindestens Schneider sind? Bei einem normalen Wenz spielt der Spieler zuerst den Eichel-Unter und wenn ein Gegenspieler beide Unter hat, den Herz- oder Schell- Unter. Bei diesem Stich können die Gegner maximal 24 Punkte erzielen ( 2 Unter und 2 x10er). Die letzten sechs Stiche macht der Spieler, weil er alle Asse besitzt.
Das Tout-Spiel ist aber hier verloren, wenn ein Gegenspieler beide Unter hat.

$\Rightarrow$ P(„Gewinn beim Wenz-Tout“) = 1 – P(„einer hat 2 Unter“) $= 1 - 3 \cdot \frac{\binom{2}{2}\binom{22}{6}}{\binom{24}{8}} \approx 69{,}57\%$

### 3.3.3.2 Gewinnerwartung beim Wenz und Wenz-Tout

Der Tout-Spieler gewinnt also in ca. 69,57% aller Fälle sein Tout-Spiel.
Lässt dies aber schon darauf schließen, dass man den Tout spielen sollte?
Zur Absicherung wird der Erwartungswert des Gewinnes in Abhängigkeit vom Grundeinsatz a beim Wenz und beim Wenz-Tout berechnet. Dieser Grundeinsatz ist je nach Absprache der Spieler unterschiedlich. Es wird daher allgemein mit dem Einsatz a gerechnet.

**Beim Wenz:**

Wie bereits oben erläutert, gewinnt der Spieler mit der Wahrscheinlichkeit ca. 69,57% das Spiel „schwarz“ und mit ca. 30,43% werden die Gegenspieler „Schneider“.
Der Einsatz des Wenz-Spiels beträgt nach offiziellen Regeln das 5-fache des Grundeinsatzes für ein Sauspiel (5a).

Ist eine Partie „Schneider“, so wird der einfache Grundeinsatz a addiert ($5a + 1a$). Ist aber eine Partie „schwarz“, zahlt die Verliererpartei jeweils den Grundeinsatz a für „Schneider“ und „schwarz“ ($5a + 2a$). Der Wenz-Spieler erhält von jedem der 3 Gegenspieler den entsprechenden Betrag (x 3).

$$\mu_{Wenz} = 3 \cdot (5a + 2a)\left(1 - 3 \cdot \frac{\binom{2}{2}\binom{22}{6}}{\binom{24}{8}}\right) + 3 \cdot (5a + 1a) \cdot 3 \cdot \left(\frac{\binom{2}{2}\binom{22}{6}}{\binom{24}{8}}\right) \approx 20{,}09a$$

**Beim Wenz-Tout:**

Der Grundeinsatz für den Wenz (5a) wird bei einem Tout-Spiel verdoppelt (10a).
Wenn aber ein Gegenspieler die restlichen beiden Unter besitzt, wird er auf jeden Fall ein „Contra“ geben, dass heißt der Einsatz wird noch einmal verdoppelt (20a).

$$\mu_{Wenz-Tout} = 3 \cdot (10a) \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{\binom{2}{2}\binom{22}{6}}{\binom{24}{8}}\right) - 3 \cdot (20a) \cdot 3 \cdot \left(\frac{\binom{2}{2}\binom{22}{6}}{\binom{24}{8}}\right) \approx 2{,}609a$$

Der zu erwartende Gewinn ist beim normalen Wenz um ein Vielfaches größer als beim Wenz-Tout. Folglich sollte der Spieler den sicheren Wenz wählen.
Risikofreudige Spieler können selbstverständlich aber auch den Wenz-Tout spielen.

## 3.3.4 Eichel-Unter, vier Asse und drei 10er

P(„EU + 4 Asse + 3 x 10er“) $= \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{4}\binom{4}{3}}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{2.629.575} \approx 0{,}00003803\%$

Um dieses Spiel Tout zu gewinnen, muss jeder der Gegenspieler einen Unter besitzen.
Anders ausgedrückt bedeutet dies:
Keiner darf 2 oder 3 Unter haben.

P(„Gewinn“) = 1 – 3 · P(„ein bestimmter Spieler hat 2 oder 3 Unter“) =

$$= 1 - 3 \cdot \left( \frac{\binom{3}{2}\binom{21}{6}}{\binom{24}{8}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{21}{5}}{\binom{24}{8}} \right) \approx 25{,}30\%$$

In der Regel wird sich der Spieler also für einen normalen Wenz entscheiden.

# 4 Trumpfverteilung
## 4.1 Die Trumpfverteilung beim Sauspiel und Farb-Solo
### 4.1.1 Berechnung des Erwartungswertes für Trümpfe beim eigenen Blatt

Berechnung aufgrund logischen Denkens:

Es gibt beim Sauspiel und beim Farb-Solo insgesamt 14 Trümpfe. Werden diese „gerecht“ auf die 4 Spieler verteilt, ergibt sich der Erwartungswert für Trümpfe:

$$\mu = \frac{14}{4} = 3{,}5$$

Rechnerischer Weg:

Der Erwartungswert ist folgendermaßen definiert:

$$\mu = \varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i W(x_i)$$

( Barth / Mühlbauer / Nikol / Wörle
Mathematische Formeln und Definitionen S.108)

Die Werte der Zufallsgröße $X_i$ (Anzahl der Trümpfe) werden mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit multipliziert und dann addiert. Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Trumpfanzahl wird folgendermaßen berechnet:

P(„x Trümpfe“) = $\frac{\binom{14}{x}\binom{18}{8-x}}{\binom{32}{8}}$ (x aus 14 Trümpfen und 8-x aus 18 Nicht-Trümpfen)

$$\mu=\varepsilon(x)=0\cdot\frac{\binom{14}{0}\binom{18}{8}}{\binom{32}{8}}+1\cdot\frac{\binom{14}{1}\binom{18}{7}}{\binom{32}{8}}+2\cdot\frac{\binom{14}{2}\binom{18}{6}}{\binom{32}{8}}+3\cdot\frac{\binom{14}{3}\binom{18}{5}}{\binom{32}{8}}+4\cdot\frac{\binom{14}{4}\binom{18}{4}}{\binom{32}{8}}+$$

$$+5\cdot\frac{\binom{14}{5}\binom{18}{3}}{\binom{32}{8}}+6\cdot\frac{\binom{14}{6}\binom{18}{2}}{\binom{32}{8}}+7\cdot\frac{\binom{14}{7}\binom{18}{1}}{\binom{32}{8}}+8\cdot\frac{\binom{14}{8}\binom{18}{0}}{\binom{32}{8}}=3{,}5$$

Durchschnittlich bekommt also jeder Spieler auf lange Sicht 3,5 Trümpfe, dies jedoch unabhängig von der Qualität der Trümpfe.

### 4.1.2 Berechnung der Varianz und der Standardabweichung

Die Standardabweichung gibt in diesem Fall an, wie die tatsächliche Trumpfanzahl vom Erwartungswert 3,5 im Mittel abweicht. Um sie zu ermitteln, muss zuvor die Varianz berechnet werden.

Nach dem Verschiebungssatz wird hier die Varianz berechnet.

$$VarX=\varepsilon(X^2)-\left[\varepsilon(X)\right]^2$$

( Barth / Mühlbauer / Nikol / Wörle
(Mathematische Formeln und Definitionen S.108)

$$VarX=0^2\cdot\frac{\binom{14}{0}\binom{18}{8}}{\binom{32}{8}}+1^2\cdot\frac{\binom{14}{1}\binom{18}{7}}{\binom{32}{8}}+2^2\cdot\frac{\binom{14}{2}\binom{18}{6}}{\binom{32}{8}}+3^2\cdot\frac{\binom{14}{3}\binom{18}{5}}{\binom{32}{8}}+4^2\cdot\frac{\binom{14}{4}\binom{18}{4}}{\binom{32}{8}}+$$

$$+5^2 \cdot \frac{\binom{14}{5}\binom{18}{3}}{\binom{32}{8}} + 6^2 \cdot \frac{\binom{14}{6}\binom{18}{2}}{\binom{32}{8}} + 7^2 \cdot \frac{\binom{14}{7}\binom{18}{1}}{\binom{32}{8}} + 8^2 \cdot \frac{\binom{14}{8}\binom{18}{0}}{\binom{32}{8}} - 3{,}5^2 \approx 1{,}524$$

$$\sigma X = \sqrt{VarX} \approx 1{,}235$$

Die Standardabweichung für die Trumpfanzahl beträgt ca. 1,235. Im Mittel weicht also die tatsächliche Trumpfanzahl um ca. 1,235 Trümpfe von den erwarteten 3,5 Trümpfen ab.

## 4.2 Zu erwartende Trumpfanzahl des Gegenspielers mit den meisten Trümpfen beim Farb-Solo

Sinn des Kapitels ist es, dem Spieler bei bekannter eigener Trumpfzahl Rückschlüsse auf die gegnerische Trumpfverteilung zu ermöglichen, um so entscheiden zu können, ob er ein bestimmtes Farb-Solo wagen kann oder nicht. Die Trumpfverteilung der anderen Spieler wäre beim Sauspiel identisch, da es bei beiden 14 Trümpfe gibt, hat aber nicht die gleiche spielerische Bedeutung wie beim Farb-Solo. Wie viele Trümpfe hat der Gegenspieler mit der höchsten Trumpfzahl auf lange Sicht im Schnitt?
Im Folgenden wird der Spieler mit den meisten Trümpfen als „der Beste“ bezeichnet. Es wird hier aber bei den folgenden Berechnungen keine Rücksicht auf die Qualität der Trümpfe genommen.

### 4.2.1 Fallberechnung für fünf Trümpfe und drei Nicht-Trümpfe

Das Spielerblatt besteht in diesem Fall aus fünf Trümpfen und drei Nicht-Trümpfen.
Es bleiben also noch 9 Trümpfe und 15 Nicht-Trümpfe (insgesamt 24 Karten).

P(„Der Beste hat 8 Trümpfe“) = $3 \cdot \frac{\binom{9}{8}\binom{15}{0}}{\binom{24}{8}} \approx 0{,}003671\%$

P(„Der Beste hat 7 Trümpfe“) = $3 \cdot \frac{\binom{9}{7}\binom{15}{1}}{\binom{24}{8}} \approx 0{,}2203\%$

P(„Der Beste hat 6 Trümpfe“) = $3 \cdot \frac{\binom{9}{6}\binom{15}{2}}{\binom{24}{8}} \approx 3{,}598\%$

P(„Der Beste hat 5 Trümpfe“) = $3 \cdot \frac{\binom{9}{5}\binom{15}{3}}{\binom{24}{8}} \approx 23{,}39\%$

Jetzt können zwei Spieler gleichzeitig 4 Trümpfe haben, eine Multiplikation mit 3 ist deswegen ausgeschlossen. Es muss also auf günstige Trumpfverteilungen geachtet werden:

Günstige Kombinationen sind: 4 – 4 – 1
4 – 3 – 2

Die Wahrscheinlichkeiten für diese Kombinationen müssen jeweils noch mit der Anzahl der Verteilungsmöglichkeiten auf die Gegenspieler multipliziert werden. Es werden zweimal 8 Karten gezogen, die letzten 8 Karten ergeben sich von selber.

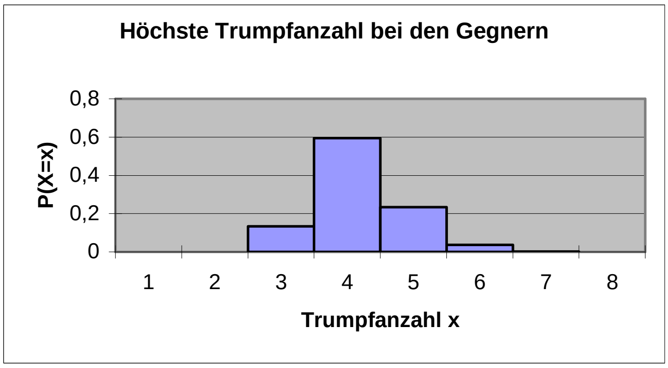
=> P(„4 – 4 – 1“) = $\binom{3}{2} \cdot \frac{\binom{9}{4}\binom{15}{4}}{\binom{24}{8}} \cdot \frac{\binom{5}{4}\binom{11}{4}}{\binom{16}{8}}$

P(„4 – 3 – 2“) = $3! \cdot \frac{\binom{9}{4}\binom{15}{4}}{\binom{24}{8}} \cdot \frac{\binom{5}{3}\binom{11}{5}}{\binom{16}{8}}$

P(„Der Beste hat 4 Trümpfe“) = P(„4 – 4 – 1“) + P(„4 – 3 – 2“) $\approx 59{,}36\%$

P(„Der Beste hat 3 Trümpfe“) = P(„3 – 3 – 3“) = $1 \cdot \frac{\binom{9}{3}\binom{15}{5} \cdot \binom{6}{3}\binom{10}{5}}{\binom{24}{8} \cdot \binom{16}{8}} \approx 13{,}43\%$

Addiert man diese errechneten Wahrscheinlichkeiten, so ergibt sich als Summe genau 1, d.h. alle Fälle wurden berücksichtigt.




Um die Trumpfanzahl des besten Spielers im Schnitt zu kennen, wird der Erwartungswert nach der bereits in Kapitel 4.1.1 aufgeführten Definition berechnet:

$\mu$ = 3 · P(„Der Beste hat 3“) + 4 · P(„Der Beste hat 4“) + 5 · P(„Der Beste hat 5“) +
+ 6 · P(„Der Beste hat 6“) + 7 · P(„Der Beste hat 7“) + 8 · P(„Der Beste hat 8“) ≈

≈ 4,178

Durchschnittlich besitzt der Beste also ca. 4,178 Trümpfe.

### 4.2.2 Fallberechnung für sechs Trümpfe und zwei Nicht-Trümpfe

Es bleiben jetzt den anderen 3 Spielern 8 Trümpfe und 16 Nicht-Trümpfe.

$$P(\text{„Der Beste hat 8“}) = 3\cdot\frac{\binom{8}{8}\binom{16}{0}}{\binom{24}{8}} \approx 0{,}0004079\%$$

$$P(\text{„Der Beste hat 7“}) = 3\cdot\frac{\binom{8}{7}\binom{16}{1}}{\binom{24}{8}} \approx 0{,}05221\%$$

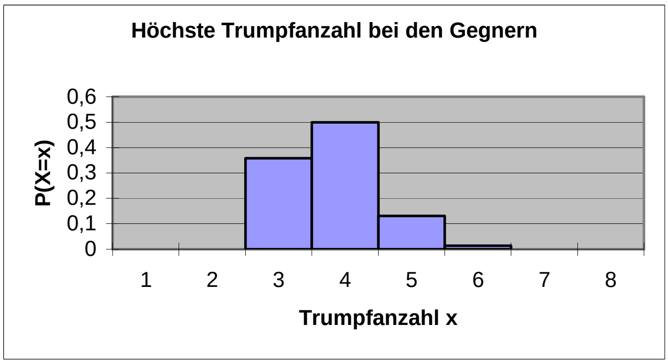
$$P(\text{„Der Beste hat 6“}) = 3\cdot\frac{\binom{8}{6}\binom{16}{2}}{\binom{24}{8}} \approx 1{,}371\%$$

$$P(\text{„Der Beste hat 5“}) = 3\cdot\frac{\binom{8}{5}\binom{16}{3}}{\binom{24}{8}} \approx 12{,}79\%$$

P(„Der Beste hat 4“) = P(„4 – 4 – 0“) + P(„4 – 3 – 1“) + P(„4 – 2 – 2“) =

$$= \binom{3}{2}\frac{\binom{8}{4}\binom{16}{4}\binom{4}{4}\binom{12}{4}}{\binom{24}{8}\binom{16}{8}} + 3!\frac{\binom{8}{4}\binom{16}{4}\binom{4}{3}\binom{12}{5}}{\binom{24}{8}\binom{16}{8}} + \binom{3}{2}\frac{\binom{8}{4}\binom{16}{4}\binom{4}{2}\binom{12}{6}}{\binom{24}{8}\binom{16}{8}} \approx 49{,}97\%$$

P(„Der Beste hat 3“) = P(„3 – 3 – 2“) = $\binom{3}{2}\frac{\binom{8}{3}\binom{16}{5}\binom{5}{3}\binom{11}{5}}{\binom{24}{8}\binom{16}{8}} \approx 35{,}82\%$




Erwartungswert:

$\mu$ = 3 · P(„Der Beste hat 3“) + 4 · P(„Der Beste hat 4“) + 5 · P(„Der Beste hat 5“) +
+ 6 · P(„Der Beste hat 6“) + 7 · P(„Der Beste hat 7“) + 8 · P(„Der Beste hat 8“) ≈

≈ 3,799

## 4.2.3 Fallberechnung für sieben Trümpfe und einen Nicht-Trumpf

Folglich sind 7 Trümpfe und 17 Nicht-Trümpfe übrig und so kann kein Spieler mehr 8 Trümpfe besitzen.

P(„Der Beste hat 7“) = $3 \cdot \frac{\binom{7}{7}\binom{17}{1}}{\binom{24}{8}} \approx 0{,}006934\%$

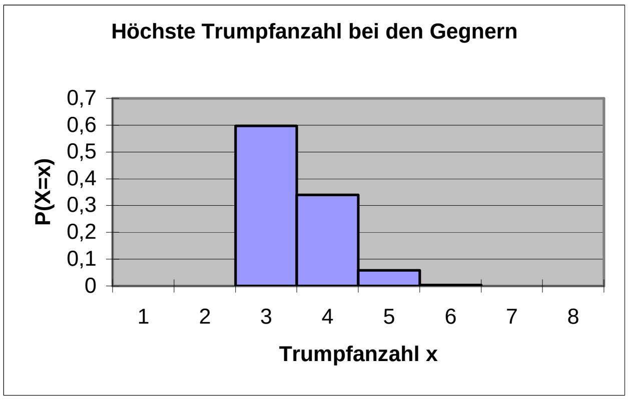
P(„Der Beste hat 6“) = $3 \cdot \frac{\binom{7}{6}\binom{17}{2}}{\binom{24}{8}} \approx 0{,}3883\%$

P(„Der Beste hat 5“) = $3 \cdot \frac{\binom{7}{5}\binom{17}{3}}{\binom{24}{8}} \approx 5{,}825\%$

P(„Der Beste hat 4“) = $3 \cdot \frac{\binom{7}{4}\binom{17}{4}}{\binom{24}{8}} \approx 33{,}98\%$

P(„Der Beste hat 3“) = P(„3 – 3 – 1“) + P(„3 – 2 – 2“) =

$$= \binom{3}{2}\frac{\binom{7}{3}\binom{17}{5}\binom{4}{3}\binom{12}{5}}{\binom{24}{8}\binom{16}{8}} + \binom{3}{2}\frac{\binom{7}{3}\binom{17}{5}\binom{4}{2}\binom{12}{6}}{\binom{24}{8}\binom{16}{8}} \approx 59{,}80\%$$




Erwartungswert:

$\mu$ = 3 $\cdot$ P(„Der Beste hat 3“) + 4 $\cdot$ P(„Der Beste hat 4“) + 5 $\cdot$ P(„Der Beste hat 5“) + + 6$\cdot$ P(„ Der Beste hat 6“) + 7$\cdot$ P(„ Der Beste hat 7“) $\approx 3{,}468$

## 4.2.4 Wahrscheinlichkeit für mindestens gleiche Trumpfzahl beim Spieler und einem Gegenspieler

Beispiel:

Der Spieler besitzt 5 Trümpfe und 3 Nicht-Trümpfe. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat also ein Gegenspieler mindestens genauso viele Trümpfe wie der Spieler?
Gesucht ist also $P(Z \geq 5)$, wobei Z als die Trumpfanzahl des besten Gegenspielers definiert werde.

$P(Z \geq 5)$ = P(„Der Beste hat 5“) + P(„ Der Beste hat 6“) + P(„Der Beste hat 7“) + + P(„Der Beste hat 8“) =

$$= 3\cdot\left(\frac{\binom{9}{5}\binom{15}{3}}{\binom{24}{8}}+\frac{\binom{9}{6}\binom{15}{2}}{\binom{24}{8}}+\frac{\binom{9}{7}\binom{15}{1}}{\binom{24}{8}}+\frac{\binom{9}{8}\binom{15}{0}}{\binom{24}{8}}\right)\approx 27{,}21\%$$

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten wurden bereits in Kapitel 4.2.1 berechnet.

Die Berücksichtigung dieser Wahrscheinlichkeit von 27,21% kann in vielen Situationen des Schafkopfspiels bedeutsam sein. Ein sehr gutes Beispiel für die Anwendung dieser Wahrscheinlichkeit ist das folgende:

Der Spieler an Position 1 besitzt alle 4 Ober, die Eichel-As, den Eichel-10er und –König und den Schell-7er. Was soll der Spieler spielen? Die Entscheidung liegt nahe, ein Eichel-Solo zu spielen. Die Gegenpartei macht aber mit Sicherheit mindestens einen Stich, wegen der Schell-7. Spielt der Spieler aber ein Schell-Solo, kann er es Tout ansagen. Keiner der Gegenspieler darf aber mehr als 4 Trümpfe haben, da ansonsten der Schell-7er überstochen wird. Dies ist das Gegenereignis zu „ein Spieler hat mindestens 5 Trümpfe“! Der Tout-Spieler gewinnt also zu ca. 72,79% sein Spiel (1 - 0,2721).

# 5 Konkrete Beispiele beim Sauspiel
## 5.1 „Dem Sauspieler fehlt der Alte“

Ein Spieler möchte gerne ein Sauspiel spielen. Er besitzt 4 Trümpfe (darunter den Laub- und den Herz-Ober), 2 Eicheln und 2 Schellen. Der Spieler möchte nun wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit er zusammen mit seinem Freund drei Laufende besitzt, wenn er mit der Eichel-As („der Alten“) spielt. Das heißt, der „Alte“ (Eichel-Ober) muss bei „der Alten“ sein. Diese beiden Karten und 6 weitere müssen also für die Berechnung gezogen werden.

P(„Ein Spieler hat den Eichel-Ober und die Eichel-As“) =

$$= 3 \cdot \frac{\binom{2}{2}\binom{22}{6}}{\binom{24}{8}} \approx 30{,}43\%$$

## 5.2 „Läuft die As oder nicht?“

Ausgangssituation:

Der Spieler an Position 2 besitzt 6 Trümpfe, den Eichel 10er und 9er. Für ein Solo hat er aber zu wenig hohe Trümpfe und spielt also mit der Eichel-As. Als erste Karte spielt der Spieler an Position 1 eine Eichel-Karte aus und sucht die As. Ist ein nach ihm folgender Gegenspieler Eichel-frei, so kann er gegebenenfalls mit einem Trumpf stechen. Soll nun der Spieler, der die „Sau gerufen“ hat, den 10er schmieren oder lieber sicher den 9er spielen?

Mit anderen Worten:

Läuft die As oder nicht?

P(„die As läuft“) = gesucht

Hierfür müssen zwei Fälle unterschieden werden, bei denen die As gestochen wird:

a) Spieler 1 hat alle 4 restlichen Eichel-Karten (auch Eichel-As) und „geht darunter“ (oder „rennt davon“).

Spieler 1 spielt Eichel und braucht also noch die 3 restlichen Eichel-Karten. „Verbraucht“ sind schon 9 Karten, die 8 Karten vom Sauspieler an Position 2 und die gespielte Eichel-Karte von Spieler 1. Es verbleiben also noch 23 Karten, die von Spieler 1 gezogen werden können.

$P(A)$ P(„Spieler 1 hat alle 3 restlichen Eichel-Karten“) =

$$= \frac{\binom{3}{3}\binom{20}{4}}{\binom{23}{7}} \approx 1{,}976\%$$

In diesem Fall geht der Stich auf jeden Fall verloren, da die Gegenspieler 3 und 4 Eichel-frei sind und mindestens einer von ihnen Trümpfe hat.

b) Spieler 3 oder 4 hat die Eichel-As

Dies tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-\dfrac{\binom{3}{3}\binom{20}{4}}{\binom{23}{7}}$ ein.

Festgelegt sind jetzt 10 Karten. Die 8 Karten von Spieler 2 sowie die ausgespielte Eichel-Karte und die Eichel-As, die jetzt beim Spielpartner an Position 3 oder 4 ist. Der Gegenspieler auf Position 3 oder 4 kann sie nicht mehr wählen. Es verbleiben also hier 22 Karten, 8 davon sind Trümpfe und 14 davon Nicht-Trümpfe. Der Gegenspieler (GS) muss Eichel-frei sein (keine von zweien) und mindestens einen Trumpf haben (mindestens 1 aus 8).

$P(B) =$

$$= \left(1-\frac{\binom{3}{3}\binom{20}{4}}{\binom{23}{7}}\right) \cdot \text{P(„GS 3 / 4 hat kein Eichel aber mindestens 1 Trumpf“)} =$$

$$= \left(1-\frac{\binom{3}{3}\binom{20}{4}}{\binom{23}{7}}\right) \cdot \frac{\binom{2}{0}\left[\binom{8}{1}\binom{12}{7}+\binom{8}{2}\binom{12}{6}+\binom{8}{3}\binom{12}{5}+\binom{8}{4}\binom{12}{4}+\binom{8}{5}\binom{12}{3}+\binom{8}{6}\binom{12}{2}+\binom{8}{7}\binom{12}{1}+\binom{8}{8}\right]}{\binom{22}{8}} =$$

$\approx 38{,}46\%$

Der Spieler verliert den Stich nur in diesen beiden Fällen. Man kommt also über das Gegenereignis zum Ziel.

$\Rightarrow$ P(„As läuft“) = 1 – [P(A) + P(B)] $\approx$ **59,56%**

Der Spieler an Position 2 kann also das relativ hohe Risiko eingehen und seine Eichel 10 spielen, da die As in etwa 59,56% aller Fälle nicht mit Trumpf gestochen werden kann.

## 6 Schlussfolgerungen fürs Spiel

Durch die unzähligen Spielvarianten bei einer einzigen Kartenverteilung war es mir nicht möglich, die einzelnen Spiele (Solo, Wenz, Sauspiel) allgemein abzuhandeln oder die Gewinnwahrscheinlichkeiten für eines der Spiele zu berechnen. Schon die individuelle Spieltaktik von Spieler oder Gegenspieler an Position 1 beeinflusst die Richtung des Spiels erheblich, so dass ich beim Farb-Solo und Wenz nur den Tout bearbeiten konnte.

Das Spiel Schafkopf hat in meiner Familie einen hohen Stellenwert. Schon mit neun Jahren lernten mir meine Eltern das Spiel und es hat mich seitdem begeistert. Es fiel mir

daher sehr leicht, mich in dieses Facharbeitsthema einzuarbeiten und so ist es nicht verwunderlich, dass diese Facharbeit nach subjektiver Einschätzung meine Spielstärke verbessert hat. Durch die Facharbeit habe ich genaue Wahrscheinlichkeiten im Hinterkopf und brauche mich so bei bestimmten Spielsituationen nicht so sehr auf mein Gefühl verlassen.
Dennoch bleibt Schafkopf im Ganzen ein praktisch unberechenbares Spiel. Eine absolute Gewinnwahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Blatt gibt es mit wenigen Ausnahmen nicht. Allerdings wäre das Spiel auch nicht mehr so reizvoll, wenn wie beim Schach alles durchanalysiert und berechenbar wäre.
Beim Schach wird schon seit dem 18. Jh. ein absoluter Gewinnweg gesucht. Heute ist das Spiel in den Eröffnungen fast vollständig durchgerechnet und es gibt kaum noch Überraschungen, so dass es sehr oft zu einem Remis kommt.
Ähnlich erginge es dem Schafkopf. Das Spiel lebt von seinen vielseitigen Überraschungen im Hinblick auf die Spieltaktiken der Gegner.
Erstaunlicherweise habe ich keine Literatur zu diesem Thema gefunden, welche die enge Verbindung zwischen Stochastik und Schafkopf aufzeigt. Auch das im November neu erschienene Buch „Schafkopf und Doppelkopf“ von Rita Danyliuk beschränkt sich auf das Regelwerk und einige Beispiele zum Solo und Sauspiel.

## 7 Literaturverzeichnis


(1) Barth / Mühlbauer / Nikol / Wörle
Mathematische Formeln und Definitionen (7.Auflage)
Erscheinungsjahr: 2001
Bayerischer Schulbuch-Verlag / J.Lindauer Verlag (Schaefer)

(2) Danyliuk, R.
Schafkopf und Doppelkopf
Erscheinungsjahr: 2004
Humboldt Verlag

(3) Die offiziellen Regeln des Bayerischen Schafkopf
Internetseite „http://www.schafkopfwelt.de/regeln.htm“
Letzte Erneuerung der Internetseite: 06.03.2004
Aufrufdatum: 12.01.2005

## Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die Facharbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die im Literaturverzeichnis angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Memmingen, den 24. Januar 2005

Manfred Magg